MAI 2 - domácí úkol 2

Metrické prostory - problémky k promyšlení, a zkuste „sepsat" řešení aspoň dvou úloh:

1. a) V prostoru $C[a,b]$ (prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$) uvažujte metriky

$$d_{\max}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \quad \text{a} \quad d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

a ověřte axiomy metrik $d(f,g)$ a $d_1(f,g)$.

(U ověření axiomů u $d_1(f,g)$ budeme asi potřebovat některé vlastnosti určitého integrálu).

b) Promyslete, co „znamená" v prostoru $C[a,b]$ s metrikou $d_{\max}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ konvergence posloupnosti $\{f_n\}_1^\infty$.

Platí : $\lim f_n = f$ v $C[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : \lim f_n(x) = f(x)$?

c) Jak „vypadá" koule v prostoru ($C[a,b], d_{\max}$) ?

2. Buď M množina všech omezených posloupností $x = \{x_n\}_1^\infty$ reálných čísel. Je-li $x, y \in M$, ukažte, že $d(x,y) = \sup_{n\in N} |x_n - y_n|$ je metrika v M (užívá se často označení (l_∞, d_∞)).

Co zde „znamená" $\lim x^{(k)} = x$ ($x^{(k)} = \left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^\infty$) ?

3. Buď (M,d) metrický prostor, $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ posloupnosti v (M,d). Dokažte (nebo ukažte, že neplatí):
$\lim x_n = x$, $\lim y_n = y \Rightarrow \lim d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

4. Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):
   a) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   b) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

5. Najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste definiční obory načrtnout. Též rozhodněte, zda nalezený definiční obor funkce je množina otevřená, resp. uzavřená a co je uzávěrem zkoumaného definičního oboru:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}\ ; \quad f(x,y) = \sqrt{2 - \frac{y}{x-1}}\ ; \quad f(x,y) = \ln(xy - 1)\ ;$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 + z^2)}\ ; \quad f(x,y,z) = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2 - z^2)}\ .$$